Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

11 de Março de 2005

Semana 3

1. Determine os valores dos seguintes integrais:

   a) $\int_C |z|\, dz$ em que C é o semicírculo percorrido em sentido directo unindo $-2i$ a $2i$.

   b) $\int_C z\cos z^2 dz$ em que C é o segmento de recta unindo 0 a πi.

2. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

   a) Calcule, utilizando a definição, $\int_{\gamma_k} e^z dz$, com $k = 1, 2$.

   b) Calcule $\int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$ com $k = 1, 2$.

   c) Comente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.

3. Considere a função

$$f(z) = \exp[(-1+i)\log z] \quad , \quad |z| > 0$$

   onde se toma para z o argumento mínimo positivo. Calcule

$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz$$

   onde a curva é percorrida no sentido positivo.

4. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \le t \le \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\Big| \int_\gamma \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \Big| \le \pi \frac{R(2R^2+1)}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - \pi i| + |z - 2\pi i| = \frac{7\pi}{2}$, percorrida no sentido positivo. Calcule

   (a) $\oint_\Gamma z^3 \cosh z\, dz$

   (b) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{ze^{-z}}{z - \frac{i}{2}}\, dz$

(c) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{1}{z^2+\pi^2}\,dz.$

(d) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-\imath\pi)}dz$

(e) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2(z-2\pi i)^3}$

(f) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z-i\pi)^{11}}\,dz$.

6. Considere a função complexa definida por

$$f(z)=f(x+iy)=x^2-y^2-2xy+2y+i\left(x^2-y^2+2xy-2x\right).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\,dz,$$

onde $C=\{z\in\mathbb{C}:|z-i|=4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

7. *Teorema de Liouville:* Mostre que se f é inteira e limitada então f é constante em $\mathbb{C}$.

Sugestão: Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que $f'(z)=0$.